⇒ сх-ть по распределению или слабая (не знаю)

1. Вероятностные модели и парадокс Бертрана.

- **Вероятностная модель** – математическая модель реального явления, содержащего элементы случайности.

- **Условия адекватности** вероятностной модели

  1. наличие случайности (либо внесли сами, либо откуда-то пришло)
  2. Воспроизводимость условий (один и тот же экспер-т мы можем воспр-ти в одних и тех же условиях (искусств-но) многое число раз)
  3. Устойчивость частот $\frac{n(A)}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} p$, $p \in const \in [0,1]$, n – общее число экспер., A – событие, $n(A)$ – число экспер., в к/п наблюд-сь событие A

- **Вероятностное пространство** — это тройка $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, где
  - Ω — мн-во элементарных исходов;
  - F — сигма-алгебра подмножеств Ω, называемых (случайными) событиями;
  - $\mathbb{P}$ — вероятностная мера или вероятность

- ОПРЕДЕЛЕНИЕ *σ-алгеброй $\mathcal{F}$ называется класс (множество подмножеств Ω), обладающий следющими свойствами (аксиомами):*

  1) $\Omega \in \mathcal{F}$;

  2) если $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$, *то* $\cup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$ *и* $\cap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$;

  3) если $A \in \mathcal{F}$, *то* $\overline{A} \in \mathcal{F}$.

- ОПРЕДЕЛЕНИЕ *Вероятностью или вероятностной мерой называется действительная функция случайного события* $\mathsf{P} : \mathcal{F} \to [0,1]$ *удовлетворяющая следующим аксиомам:*

  1) неотрицательность: $\mathsf{P}(A) \geq 0,\ \forall A \in \mathcal{F}$;

  2) нормированность: $\mathsf{P}(\Omega) = 1$;

  3) σ-аддитивность (или счетная аддитивность): если $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$, $A_i A_j = \emptyset,\ i \neq j$, *то* $\mathsf{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathsf{P}(A_i)$.

Пусть задано некоторое вероятностное пространство $(\Omega,\ \mathcal{F},\ \mathsf{P})$.

- ОПРЕДЕЛЕНИЕ *Случайной величиной называется действительная функция элементарного события* $\xi : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, *обладающая свойством измеримости:* $\xi^{-1}(B) \equiv \{\omega | \xi(\omega) \in B\} \in \mathcal{F}$ *для любого* $B \in \mathcal{B}$.

- $\mathfrak{B}$ — **борелевская σ-алгебра** — σ-алгебра, порожденная всеми [a, b).

Т (о продолжении меры) $\exists!$ μ-мера на $\mathcal{B}$: на всех отрезках от a до b $\mu^*([a,b]) = \mu([a,b))\ \forall [a,b)$. Оп $\mu([a,b)) = b-a$ – мера

- **Распределение** случайной величины ξ — **P (ξ ∈ B)** $\forall B \in \mathcal{B}$
- **Функция распределения** случайной величины ξ — $F_\xi(x) = P(\xi < x) = P(\xi \in (-\infty, x))$

- Свойства функции распределения:

  1. $0 \leq F_\xi(x) \leq 1 \; \forall x \in R$
  2. $F_\xi(x)$ не убывает
  3. $\lim_{x \to +\infty} F_\xi(x) = 1, \quad \lim_{x \to -\infty} F_\xi(x) = 0$
  4. $F_\xi(x)$ непрерывна слева.

- Виды функций распределения:

- **Дискретные** — число точек роста не более чем счётно.
- **Абсолютно-непрерывные** — $\exists\, f_\xi(u) \geq 0$, т.ч. $F_\xi(x) = \int_{-\infty}^{x} f_\xi(u)\,du$ почти всюду

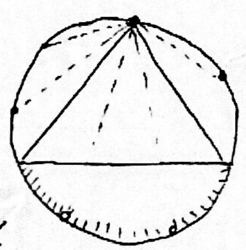
  $f_\xi(x)$ — плотность

- **Сингулярные** — непрерывные, но мера (Лебега) множества точек роста которых равна нулю.

Парадокс Бертрана

- Найти вероятность того, что случайная хорда окружности длиннее стороны правильного треугольника, в неё вписанного.

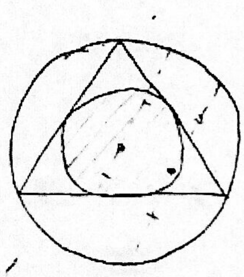
1)



$p = \frac{1}{3}$

$\Omega = [0; 2\pi]$

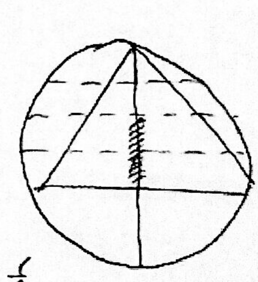
2)



$p = \frac{1}{4}$

Ω = круг

3)



$p = \frac{1}{2}$

Ω – диаметр

Пусть одним концом хорды является вершина вписанного треугольника. Она делит окружность на три равные дуги, и случайная хорда длиннее стороны правильного треугольника, если она пересекает этот треугольник. Искомая вероятность теперь равна 1/3.

Случайным образом в круге выбирается точка. Эта случайная точка определяет единственную хорду, серединой которой она является. Эта хорда длиннее стороны вписанного правильного треугольника тогда и только тогда, когда ее середина лежит внутри круга, вписанного в треугольник. Радиус этого круга равен половине радиуса исходного круга, следовательно, площадь его составляет 1/4 площади исходного.

Выберем точку случайным образом на диаметре окружности и возьмем хорду, которая перпендикулярна этому диаметру и проходит через выбранную точку. Тогда случайная хорда длиннее стороны вписанного правильного треугольника, если случайная точка лежит на той половине диаметра, которая ближе к центру. Искомая вероятность равна 1/2.

Ответом в парадоксе Бертрана может быть любое число от 0 до 1.

2. Математическая модель центра случайной величины.

Математическое ожидание

б **Математическое ожидание** случайной величины ξ: $\mathbb{E}\xi = \int_\Omega \xi(\omega)\mathbb{P}(d\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x\,dF_\xi(x)$

В дискретном случае $\mathbb{E}\xi = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \mathbb{P}(\xi = x_i)$

В абсолютно непрерывном случае $\mathbb{E}\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x f_\xi(x)\,dx$

$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$, $X_1, \ldots, X_n$ - нОР сл.в.

1) Матожидание не всегда существует. Например, его нет у случайной величины с плотностью: $f_\xi(x) = \dfrac{1}{\pi(1+x^2)}$

2) Если матожидание существует, то оно единственно.

3) мат. ожид-е линейно

4) мат. ож. не устойчиво к выбросам

Медиана

10 X_q — **квантиль** распределения $F_\xi(x)$ порядка $q \in (0,1)$ — это такая точка X_q, что $\begin{cases} \mathbb{P}(\xi \leqslant X_q) \geqslant q. \\ \mathbb{P}(\xi \geqslant X_q) \geqslant 1 - q. \end{cases}$

Если ξ непрерывна, то квантиль однозначно определяется из уравнения $F_\xi(X_q) = q$

б **Медиана** — квантиль порядка 1/2: $\operatorname{med}\xi = X_{\frac{1}{2}}$

1) Медиана определена всегда.

2) Медиана может быть неединственна (в дискретном случае:) $\left(\xi = \begin{cases} 0 & \mathbb{P} = \frac{1}{2} \\ 1 & \mathbb{P} = \frac{1}{2} \end{cases}\right)$

(В этом случа $\operatorname{med}\xi = x\ \forall x \in [0,1]$)

3) устойчива к выбросам

(Медиана — «среднее» значение случайной величины)

Мода

б • В случае дискретной случайной величины $\operatorname{mod}\xi = \{x_i \mid \mathbb{P}(\xi = x_i) \geqslant \mathbb{P}(\xi = x_k)\ \forall k \neq i, k \in \mathbb{N}\}$

6 • В случае абсолютно непрерывной случайной величины с плотностью $f_\xi(x)$ $\operatorname{mod}\xi = \{x \mid f_\xi(x) \geqslant f_\xi(y)\ \forall y \in \mathbb{R}\}$

Мода всегда определена.
Мода — наиболее ожидаемое значение случайной величины.

Вопрос: Зачем так много мат. моделей? Какая лучше?
Ответ: математическое ожидание может не существовать (р. Коши), мода может не быть единственной (равномерное распределение, примеры многомодальных распределений) и т.д. Поэтому необходимы разные модели.

Вопрос: посчитать квантиль 15-го порядка.
Ответ: он не существует.

3. Математическая модель разброса случайной величины.

Модели:

- $D\xi = E(\xi - E\xi)^2 =$ — дисперсия $D\xi \geq 0$; $D\xi = 0 \Leftrightarrow \xi = const$ $\forall \xi$; $D(c\xi) = c^2 \cdot D\xi$
- $\sigma = \sqrt{D\xi}$ — среднеквадратичное отклонение
- $E|\xi - med\xi|$
- $E|\xi - E\xi|$ — метрика (инженерная метрика)
- $med\,|\xi - med\xi|$ — median absolute deviation (MAD) – медиана абс-го отклонения от медианы
- $X_{\frac{3}{4}} - X_{\frac{1}{4}}$ — Интерквантильный размах (IQR), разность $x_{0.75} - x_{0.25}$. Интерквантильный размах является аналогом дисперсии.

---

4. Случайные величины. Зависимость событий и случайных величин.

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$

Опр. События A и B $\in$ ***F*** **независимы**, если P(AB) = P(A)P(B)

Опр. $A_1, A_2, \dots A_n \in F$ **независимы в совокупности**, если $\forall\ 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$, $\forall 2 \leq k \leq n$

$$P\left(A_{i_1} \dots A_{i_k}\right) = P\left(A_{i_1}\right) \dots P\left(A_{i_k}\right)$$

Опр. ξ, η - сл. вел. **независимы**, если $\forall B_1, B_2 \in \mathcal{B}$: $P(\xi \in B_1, \eta \in B_2) = P(\xi \in B_1)P(\eta \in B_2)$

Опр. Ковариация: $cov(\xi, \eta) = E\left[(\xi - E\xi)(\eta - E\eta)\right] = E\xi\eta - E\xi E\eta$

Свойства ковариации:

1) линейна по своим аргументам
2) симметрична, т.е. $cov(\xi, \eta) = cov(\eta, \xi)$
3) инвар-на от сдвига аргумента на const
4) $cov(\xi, \eta) = 0$ если ξ и η независимы, обр-е не верно

↑ качественное хар-ко зависимости (не показывает насколько, только как)

Опр. Коэффициент корреляции: $corr(\xi, \eta) = \dfrac{cov(\xi, \eta)}{\sqrt{D\xi D\eta}}$

Свойства коэффициента корреляции:

1) $|corr(\xi, \eta)| \leq 1$
2) $|corr(\xi, \eta)| = 1 \Leftrightarrow \exists a, b : \eta = a\xi + b$
3) если одна из сл.в. = const, то corr = 0
4) $|corr(\xi, \eta)| = 0 \Rightarrow \xi, \eta$ – некоррелированы

ξ, η – н/з $\Rightarrow corr(\xi, \eta) = 0$

5. Виды сходимости случайных величин

- **Виды сходимости:** ∃ задано некот. вер. пр-во $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ и посл-ть $\xi_1, \xi_2 \dots$ сл. в. на нём.

(почти всюду, с вер. 1)

$\xi_n \xrightarrow{п.н.} \xi$ 1) Сходимость **почти наверное**: $P(\omega: \lim\limits_{n\to\infty} \xi_n(\omega) = \xi(\omega)) = 1$

$\xi_n \xrightarrow{P} \xi$ 2) Сходимость **по вероятности**: $\forall \varepsilon > 0 \; P(|\xi_n - \xi| > \varepsilon) \underset{n\to\infty}{\to} 0$

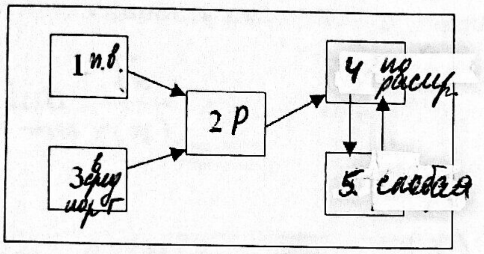
$\xi_n \xrightarrow{r} \xi$ 3) Сходимость **в среднем порядка r**: $E|\xi_n - \xi|^r \underset{n\to\infty}{\to} 0$

$\xi_n \xrightarrow{d} \xi$ 4) Сходимость **по распределению**: $\underbrace{F_n(x)}_{ф.р.\ \xi_n} \underset{n\to\infty}{\to} \underbrace{F(x)}_{ф.р.\ \xi}$ в точках непрерывности $F(x)$

$\xi_n \xrightarrow{w} \xi$ 5) **Слабая** сходимость: $\forall \varphi(x)$ - непрерывная, ограниченная: $\int \varphi(x)dF_n(x) \to \int \varphi(x)dF(x)$

$E\varphi(\xi_n) \underset{n\to\infty}{\to} E\varphi(\xi)$

- **Взаимосвязь между сходимостями**



- ## Теорема (Центральная предельная теорема)

Пусть $X_1, X_2, X_3 \dots$ - независимые одинаково распределённые случайные величины (норсв)
Существует мат. ожидание $EX_i = a$ – конечно, дисперсия $DX_i = \sigma^2 < \infty$, > 0

Тогда $P\left(\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i - na}{\sigma\sqrt{n}} < x\right) \xrightarrow{n\to\infty} \Phi(x)$ равномерно по x.

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{\frac{-u^2}{2}} du$$

, где — стандартное нормальное распределение.

- **Оценка скорости сходимости в ЦПТ**

Неравенство Берри-Эссеена:

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \left| P\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i - na}{\sigma\sqrt{n}} < x\right) - \Phi(x) \right| \le \frac{C_0 \mu_3}{\sigma^3 \sqrt{n}}$$

где C_0 – константа $(0.4 < C_0 < 0{,}5)$, $\mu_3 = E|X_i - a|^3 < \infty$

r(n) — скорость сходимости (порядок убывания остатка), $\tau(n) = 1/\sqrt{n}$

Для того, чтобы была справедлива ЦПТ, достаточно существования только мат. ожидания.
Для выполнения неравенства Берри-Эссеена необходимо существование третьего центрального момента.
Если потребовать только $\exists \mathbb{E}|\xi_i - \mathbb{E}\xi_i|^2$, скорость сходимости будет сколь угодно медленная.
Если потребовать $\exists \mathbb{E}|\xi_i - \mathbb{E}\xi_i|^{3+\varepsilon}$, скорость сходимости не увеличится.

Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_n, \ldots$ — независимые случайные величины с конечными матожиданиями a_i и дисперсиями b_i^2

Пусть $A_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$, $B_n^2 = \sum_{i=1}^{n} b_i^2$, $F_n = \mathbb{P}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}\xi_i - A_n}{B_n} < x\right)$

Условие Линдеберга

$$\forall t > 0 \quad \frac{1}{B_n^2}\sum_{i=1}^{n}\int_{|x-a_i|>tB_n} |x-a_i|^2\, dF_i(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \qquad (*)$$

, где $F_i(x)$— функция распределения i-й случайной величины.

Теорема Линдеберга-Феллера

При выполнении условия Линдеберга и наличия конечных матожиданий и дисперсий существуют пределы:

$$\begin{cases} \sup\limits_x |F_n(x) - \Phi(x)| \overset{x}{\underset{n\to\infty}{\rightrightarrows}} 0 \\ \lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{1\leqslant i\leqslant n} \mathbb{P}(|\xi_i - a_i| > \varepsilon B_n) = 0 \quad \forall\varepsilon > 0. \qquad (**) \end{cases}$$

Второе условие — условие равномерной предельной малости (равномерность по i).

Обр-но: сх-ть к станд. норм. закону и вып-но $(**)$ $\Rightarrow$ вып-но $(*)$

Теорема Ляпунова

Если $\exists \mathbb{E}|\xi_i - \mathbb{E}\xi_i|^3 = M^3$, $\frac{M^3}{B_n^3} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, то справедлива центральная предельная теорема, т.е. $F_n(x) \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} \Phi(x)$

$M_n^3 = \sum_{i=1}^{n} M_i^3$

$F_n = P\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}\xi_i - A_n}{B_n} < x\right)$, $A_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$, $B_n^2 = \sum_{i=1}^{n} b_i^2$

6. Закон больших чисел

Теорема (ЗБЧ) Колмогорова

Пусть есть бесконечная последовательность норсв $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$, определённых на одном вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Пусть $\mathbb{E}X_i = \mu, \ \forall i \in \mathbb{N}$.

Обозначим S_n выборочное среднее первых n членов: $S_n = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, \ n \in \mathbb{N}$

Тогда $S_n \to \mu$ почти наверное.

Оценка скорости сходимости ЗБЧ: $Y_n = \left| S_n - \mu \right|$

r(n) — **скорость сходимости** (порядок убывания остатка)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{Y_n}{r(n)} = c : 0 \neq c < \infty$$

Из ЦПТ видно, что логично взять $r(n) = 1/\sqrt{n}$. Посмотрим:

$$\mathbb{P}\left(\sqrt{n}\,|S_n-\mu| < \varepsilon\right) = \mathbb{P}\left(-\varepsilon < \sqrt{n}(S_n-\mu) < \varepsilon\right) = \mathbb{P}\left(-\frac{\varepsilon}{\sigma} < \frac{\sum X_i - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} < \frac{\varepsilon}{\sigma}\right)$$

$$\xrightarrow[n\to\infty]{\text{п. н.}} \Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right) - \Phi\left(-\frac{\varepsilon}{\sigma}\right) = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right) - 1 \underset{<\infty}{\underset{\neq 0}{}} \text{ — действительно, предел нетривиальный}$$

, где $\Phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{x} e^{\frac{-u^2}{2}} du$ — стандартное нормальное распределение.

$\mathcal{D}X_i = \sigma^2$

7. Распределение Пуассона

$P(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$ — **распределение Пуассона** с параметром $\lambda>0$, если X – случайная величина, принимающая целочисленные неотрицательные значения.

$EX = DX = \lambda$

- **Теорема** *Пусть* $X_1, X_2, \ldots$ — *н.о.р.с.в.*

$$X_i \sim Bi(1,p)$$
$$np = \lambda$$
$$p \leqslant \frac{1}{4}$$
$$k-1 \leqslant \frac{n}{4}$$

$S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n \sim Bi(n,p)$ $\quad ES_n = np \quad DS_n = npq$

$$P(S_n = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

тогда $P(S_n = k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda + r_n(k)}$

где $\frac{\lambda k}{n} + 2\frac{(1-k)k}{n}\ln\frac{4}{3} - \frac{2\lambda^2}{3n} \leqslant r_n(k) \leqslant \frac{\lambda k}{n} + \frac{(1-k)k}{2n}$

(Так что пуассоновское распределение — предельное для биномиального (при $n\to\infty$).)

- **Опр. Схема серий**

$$\begin{matrix} X_{1,1} \\ X_{2,1}, X_{2,2} \\ \vdots \\ X_{n,1}, X_{n,2}, \ldots, X_{n,n} \end{matrix}$$

$\forall$ строка – серия
в $\forall$ серии НОР сл.в.
расп-е от серии к серии может меняться

Теорема Пуассона

Пусть $\{X_{n,i}\}$ – схема серий

$X_{n,i} \sim \begin{cases} 1, & p_n \\ 0, & q_n = 1-p_n \end{cases}$

$n \cdot p_n \xrightarrow[\substack{n\to\infty \\ p_n \to 0}]{} \lambda > 0$

Тогда $\forall k \in \mathbb{N}\cup\{0\}\ \lim\limits_{n\to\infty}\mathbb{P}(S_n = k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$

- **Обобщение теоремы Пуассона**

Пусть $\{X_{n,i}\}$ – схема серий

$X_{n,i} \sim \begin{cases} 1, & p_n \\ 0, & q_n = 1-p_n \end{cases}$

Пусть $\max\limits_{1\leqslant j\leqslant n} p_{n,j} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, $\sum\limits_{j=1}^{n} p_{n,j} \xrightarrow[n\to\infty]{} \lambda \in (0,\infty)$, Тогда $\forall k \in \mathbb{N}\cup\{0\}\ \lim\limits_{n\to\infty}\mathbb{P}(S_n = k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$

8. Устойчивые распределения

- **Опр.** G(x) — **устойчивая функция** распределения, если для ее характеристической функции g(t) выполнено

$$\forall a_1, a_2 > 0 \quad \exists b \in R, a > 0 : g(a_1 t) g(a_2 t) = e^{ibt} g(at)$$

или $G(a_1 x+b_1)*G(a_2 x+b_2) = G(a x+b)$ ($\forall$ $a_1,a_2>0$, b_1,b_2 из R, $\exists$ a>0 и $\exists$ b из R)

где * — это **свёртка**: $\left((f * g)(t) = \int_{\mathbb{R}} f(\tau) g(t-\tau)\, d\tau\right)$

а **характеристическая функция** $g_X(t) = \mathbb{E}\left[e^{itX}\right] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\, \mathbb{P}_X(dx)$

- все устойчивые расп. абс. непр. (т.е. обладают плотностью)

- **Теорема Леви**

Пусть X_1, X_2 … — норсв. Для того чтобы ф-я расп-я F(x) могла быть предельной при $n \to \infty$ для распределений сумм

$$S_n = \frac{X_1 + \ldots + X_n - a_n}{b_n}$$

при некоторых $a_n \in \mathbb{R}\ u\ b_n > 0$ $\Longleftrightarrow$ необх. , F(x) — устойчива.

- **Опр.** Функция распределения F(t) с характеристической функцией f(t) называются безгранично делимыми, если $\forall\ n \geq 1\ \exists$ характеристическая функция $f_n(t)$ такая, что $f(t) = (f_n(t))^n$

- **Теорема Хинчина**

Пусть $\{X_{n,j}\}$, $n = 1, 2, \ldots$ – последовательность серий независимых в каждой серии случайных величин.

Пусть вып-но условие равномерной предельной малости:

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{1 \le j \le m_n} P(|X_{n,j}| > \varepsilon) = 0 \quad \forall \varepsilon > 0$$

Тогда F(x) может быть предельной при $n \to \infty$ для распределений сумм $S_{n,m_n} = X_{n,1} + X_{n,2} + \ldots + X_{n,m_n}$ $\Longleftrightarrow$, F(x) безгранично делима.

Всего 4 уст-х расп-ия, у к/т плотность имеет явный вид.

1) $\alpha = 2$ – норм. расп
2) $\alpha = 1$ – расп. Коши
3) $\alpha = \frac{1}{2}$ – расп. Леви $x < 0$
4) $\alpha = \frac{1}{2}$ – расп. симм-е к расп. Леви $x \geq 0$

$\boxed{T}$ $g(t)$ – уст-ва $\Longleftrightarrow$ $g(t) = e^{iat - c|t|^{\alpha}\left(1 + ib\frac{t}{|t|} \cdot Q(t,\alpha)\right)}$, $Q(t,\alpha) = \begin{cases} tg\frac{\pi\alpha}{2}, & \alpha \neq 1 \\ \frac{2}{\pi} \cdot \lg|t|, & \alpha = 1 \end{cases}$

$\alpha \in (0,2]$ – хар-й показатель

9. Информация и энтропия. Их свойства.

Информация

Опр. Пусть A – событие, P(A) > 0. Тогда **информацией события**, содержащейся в A, называется величина $I(A) = -\log_a P(A)$ $a > 1$

$I(A|A)$

Опр. Пусть A,B – события, P(A) > 0, P(B) > 0. Тогда **информацией события**, содержащейся в B относительно A, называется величина $I(A \mid B) = \log_a \frac{P(A \mid B)}{P(A)}$ $a > 1$

Основание логарифма определяет единицу измерения информации.
Если основание e — *nat*,
если основание 2 — *bit*.
Основание логарифма всегда больше единицы.

Свойства информации:

1) Чем меньше P(A), тем больше I(A).
2) Если A, B – независимые с.в., I(A|B) = 0.
3) Если A, B – независимые с.в., I(AB) = I(A)+ I(B).

Энтропия

Опр. Пусть E – эксперимент с исходами и соответствующими им вероятностями $\begin{matrix} A_i, \ldots, A_n \\ p_i, \ldots p_n \end{matrix}$ $\sum p_i = 1$

Пусть Q(E) — случайная величина со значениями $I(A_i)$, принимаемыми с вероятностями p_i, т.е. показывает сколько инф-ии и с какой вер-ю мы получим от эксперимента

Тогда **энтропией** E называется величина $H(E) = \mathbb{E}Q(E) = -\sum_{i=1}^{n} p_i \log_a p_i$
(мера неопред-ти этого экспер-та) (среднее зн-е эксперимента)

Свойства энтропии:

$\exists$ E-эксперимент с n исходами $A_1, \ldots, A_n$, $p_i = P(A_i)$

1) $H(E) \geqslant 0$; $H(E) = 0 \Leftrightarrow \exists j: p_j = 1,\ p_i = 0\ \forall i \neq j$
2) H(E) не зависит от A_i, а зависит только от p_i, $i = \overline{1,n}$
3) H(E) — непрерывная функция $p_1, \ldots, p_n$ и явл. симметр. ф-ей от $p_1, \ldots, p_n$
4) Максимальная энтропия у экспериментов с n исходами у того, у которого исходы равновероятны. $p_i = \frac{1}{n}$
5) E – эксперимент с исходами $\begin{matrix} A_i, \ldots, A_n \\ p_i, \ldots p_n \end{matrix}$

E_1 получается из E объединением двух исходов с номерами i и j.

E_2 — эксперимент с двумя исходами A_i, A_j которым соответствуют вероятности $p_i/(p_i+p_j)$, $p_j/(p_i+p_j)$.

Тогда $H(E) = H(E_1) + (p_i + p_j)H(E_2)$

6) **Теорема Фадеева**

$\exists\ p_i \geqslant 0\ i = \overline{1,n}$, $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$

Если функционал $H(p_1, \ldots p_n)$ удовл. 1)-5) => $H(p_1, \ldots p_n) = -\sum_{i=1}^{n} p_i \log p_i$

10. Дифференциальная энтропия. Свойства некоторых распределений.

- ξ *абсолютно непрерывна* сл.в. Тогда энтропия равна $H(\xi) = -\mathbb{E}\log p_{\xi}(x)$

Где $p_{\xi}(x)$ - плотность распределения ξ. Такая энтропия называется **дифференциальной энтропией**.

(св-ва диф. энтр. некоторых распределений)

- **Теорема** *Пусть ξ — абс. непрерывная сл. вел..*

1. *Пусть $\xi \sim \mathrm{R}_{[-a,a]}$, тогда $H(\xi) \geqslant H(\eta), \forall \eta : P(|\eta| \leqslant a) = 1$.*
   (равн. расп-е имеет max энтр-ю на отрезке по сравнению с $\forall$ др. расп. на этом отрезке)
2. *Пусть $\xi \sim \Gamma(\lambda, 1)$, тогда $H(\xi) \geqslant H(\eta), \forall \eta : P(\eta \geqslant 0) = 1$ и $\mathbb{E}\eta = \frac{1}{\lambda}$.*
3. *Пусть $\xi \sim N(a, \sigma^2)$, тогда $H(\xi) \geqslant H(\eta), \forall \eta : \mathbb{E}\eta = a$ и $\mathrm{D}\eta = \sigma^2$*

, где $\mathrm{R}_{[-a;a]}$ — равномерное распределение

$\Gamma(\lambda, 1)$ — показательное распределение

N (a, δ^2) — нормальное распределение

Вывод:

1. Равномерное распределение наиболее неопределенное среди всех распределений на конечном отрезке.
2. Показательное распределение наиболее неопределенное среди всех распределений на положительной полуоси.
3. Нормальное распределение наиболее неопределенное среди всех распределений на $\mathbb{R}$.

Замечание: на эту теорему может быть задача.

11. Определение пуассоновского процесса.

- **Опр. Случайный процесс** — семейство случайных величин $X(t,\omega)$, определенное на одном пространстве (Ω, A, P), $t \in T \subset \mathbb{R}$.
  $\equiv X(t)$

- **Опр. Траектория** случайного процесса — $X(t, \omega_0)$ при фиксированном ω_0.
  если $T \subset \{0; \pm 1; \pm 2; \dots\} \Rightarrow X(t)$ - процесс с дискр-м временем
  T - отрезок или п/прямая $\Rightarrow X(t)$ - пр-с с непр. вр. ; $T \subset \mathbb{R}^n \Rightarrow$ случ. поле
  S — пр-во всех возм-х траекторий случайного процесса.
  На S можно определить борелевскую сигма-алгебру Σ, порожденную множеством всех открытых подмножеств S.

- $X: \Omega \to S$; X наз. случайным эл-м, если оно изм-мо (т.е. $\forall B \in \Sigma$ $X^{-1}(B) \in \mathcal{A}$)

- **Опр. Распределением** случайного процесса называется мера Px, т.ч. $\forall A \in \Sigma$:
  $Px(A) = P(\omega : X(t) \in A)$

- **Опр.** Процесс $X(t)$ — процесс **с независимым приращением**, если $\forall t_0, t_1 \dots, t_n \in T$, $t_0 < t_1 < \dots < t_n$
  $X(t_0)$, $X(t_1)-X(t_0)$, … , $X(t_n)-X(t_{n-1})$ — независимы в совокупности.

- **Опр.** Процесс $X(t)$ — **однородный** (по времени), если распределение $X(t+h) - X(t)$ совпадает с распределением $X(s+h) - X(s)$ для $\forall t, s, h$: $t, t+h, s, s+h \in T$. $h \geq 0$

- **Опр.** Процесс $X(t)$ — **пуассоновский**, если
  1) $X(0)=0$ почти наверное
  2) $X(t)$ имеет независимые приращения
  3) $X(t)$ однородный процесс
  4) При $h \to 0+$ $\exists \lambda > 0$
     $P(X(h) = 0) = 1 - \lambda h + \bar{o}(h)$
     $P(X(h) = 1) = \lambda h + \bar{o}(h)$
     $P(X(h) >= 2) = \bar{o}(h)$

λ – интенсивность пуассоновского процесса.

Для пуассоновского процесса $\boldsymbol{E}X(t) = \boldsymbol{D}X(t) = \lambda t$

12. Информационные свойства Пуассоновского процесса

Пусть $\tau_1, \ldots, \tau_n$ – упорядоченные скачки Пуассоновского процесса.

1) Время ожидания м/у скачками имеет показ-е распр-е с пар-м λ. (обладает св-м отсутствия памяти)

2) **Теорема** *Пусть* $\tau_1, \ldots, \tau_n$ *— упорядоченные скачки Пуассоновского процесса на* $[a, b]$. *Тогда* усл-е совместное *распределение* $(\tau_1, \ldots, \tau_n \mid X(b) - X(a) = n)$ *совпадает с распределением вариационного ряда, построенного по выборке объема* n *из равномерного распределения на отрезке* $[a, b]$.

$X_{(1)}, \ldots, X_{(n)}$ - вариац. ряд; X_i имеет плотность $f(x)$, тогда

совместная плотность $f_{1 \ldots n}(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} n! \prod\limits_{i=1}^{n} f(x_i), & x_1 < x_2 < \ldots < x_n \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$

ЦПТ для пуассоновского процесса

Пусть X(t) – пуассоновский процесс.

Теор. $P\left(\dfrac{X(t) - \overset{EX(t)}{\lambda t}}{\sqrt{\underset{=DX(t)}{(\lambda t)}}} < x\right) \rightrightarrows \Phi(x)$, где $\Phi(x)$ – функция стандартного распределения N(0,1), причём сходимость равномерна по x, при $\lambda t \to \infty$, т.е.

$$\Delta(\lambda t) = \sup_{x} \left| P\left(\frac{X(t) - \lambda t}{\sqrt{(\lambda t)}} < x\right) - \Phi(x) \right| \le \frac{C_0}{\sqrt{(\lambda t)}},$$

C_0 – константа из шр ва Берри-Эссеена

13. Случайные суммы, их основные свойства; пуассоновские случайные суммы

∃ N − целочисленная неотриц-я сл. в. на $(\Omega, \mathcal{A}, P)$
$X_1, X_2, \dots$ − НОР сл.в на $(\Omega, \mathcal{A}, P)$
$N, X_1, X_2, \dots$ − нез. сл.в.

Опр. **Случайная сумма** $S_N = X_1(\omega) + X_2(\omega) + \dots + X_{N(\omega)}(\omega)$

Свойства сл. суммы:

∃ $p_n = P(N=n)$
$F(x)$ − ф. расп. X_i
$p(x)$ − плотность X_i
$f(t)$ − хар-я ф-я X_i

1) $F_{S_N}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n F^{*n}(x)$, где

$F^{*n}(x)$ — n-кратная свертка функции распределения F
$F^{*0}(x)$ — функция распределения с единичным скачком в нуле $= \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$

2) Если $p_0 > 0$ => F_{S_N} **не** является абсолютно непрерывной, даже если X_i - абс. непр.

$p_0 = 0$ и X_i - абс. непр. => существует $p_{S_N}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n p^{*n}(x)$, $p^{*n}(x)$ n-кратная свертка плотности p ;

3) $f_{S_N}(t) = \psi(f(t))$; $\psi(s)$ — производящая функция N;

4) $\mathbf{E}S_N = \mathbf{E}N * \mathbf{E}X_i$; $\mathbf{D}S_N = \mathbf{D}N * (\mathbf{E}X_i)^2 + \mathbf{E}N * \mathbf{D}X_i$

Опр. $N \sim \Pi(\lambda)$ => $S_N = S_\lambda$ есть **пуассоновская случайная сумма**

Расп-е пуасс. сл. суммы S_λ − обобщенное пуасс. расп-е. $f_{S_\lambda}(t) = e^{\lambda(f(t)-1)}$, $t \in \mathbb{R}$ — хар-я ф-я S_λ

Свойства пуасс. сл. суммы

1) S_N обладает безгранично делимым распределением.

2) $\mathbf{E}S_N = \lambda \mathbf{E}X_i$; $\mathbf{D}S_N = \lambda(\mathbf{E}X_i^2)$

(Аналог ЦПТ для пуасс. суммы)

Теорема 3 ∃ $X_1, \dots, X_N$ − нор. с.в., $\mathbb{E}X_1^2 < \infty$; $a = \mathbb{E}X_1$, $b^2 = \mathbb{D}X_1$, $N \sim \Pi(\lambda)$; $N, X_1, X_2, \dots$ − нез.

$$\mathbb{P}\left(\frac{S_\lambda - \lambda a}{\sqrt{\lambda(b^2+a^2)}} < x\right) \underset{\lambda\to\infty}{\overset{\text{по } x}{\rightrightarrows}} \Phi(x)$$

Если же ∃ $\mathbb{E}X_1^3 < \infty$, то $\sup_x \left|\mathbb{P}\left(\frac{S_\lambda - \lambda a}{\sqrt{\lambda(b^2+a^2)}} < x\right) - \Phi(x)\right| \leq$
$\leq \frac{C_0 L_1}{\sqrt{\lambda}}$, где $L_1 = \frac{\mathbb{E}|X_1|^3}{(b^2+a^2)^{3/2}}$, C_0 − константа из нер-ва Берри-Эссеена)

14. Геометрические случайные суммы, теорема Реньи, связь между геометрическими и пуассоновскими случайными суммами

$X_1, X_2, \ldots$ – н.о.р.с.в., $N, X_1, X_2, \ldots$ – нез. сл.в.

$N \sim Geom(p) \Rightarrow X_1 + \ldots + X_N$ — геометрическая случайная сумма

$EN = \frac{1-p}{p}$; $DN = \frac{1-p}{p^2}$; $\underbrace{\psi_N(s) = \frac{p}{1-(1-p)^s}}_{\text{производ. ф-я}}$; $P(N=n) = p(1-p)^n$ $n=0,1,\ldots$ т.е.

Теорема (Реньи) *Пусть $X_1, X_2, \ldots$ — н.о.р.с.в. и $X_i \geqslant 0$, $0 < \alpha_1 = \mathbb{E}X_i < \infty$. Положим $S_N = \sum\limits_{i=1}^{N} X_i$, где $N \sim Geom(p)$. Тогда $\sup\limits_x |P(\frac{p}{\alpha_1} S_N < x) - G(x)| \xrightarrow{p\to 0} 0$, где $G(x) = (1-e^{-x})\mathbb{I}_{\{x \geqslant 0\}}$* – ф-я расп. стандартного показательного расп-я. *Если* $0 < \alpha_1 = EX_i$, $\alpha_2 = EX_i^2 < \infty$, *тогда* $\sup\limits_x |P(\frac{p}{\alpha_1} S_N < x) - G(x)| \leqslant \frac{p\alpha_2}{(1-p)\alpha_1^2}$.

Лемма *Пусть M — целочисл. обобщ. Пуассоновская сл. вел. (неотриц.).* $X_1, X_2, \ldots$ – о.р. сл. в. с общей хар. ф-й $f(t)$, $M, X_1, X_2, \ldots$ – нез. сл.в. *Тогда $\underset{X_1+\ldots+X_M}{S_M}$ — Пуассоновская сл. сумма.*

Лемма *Пусть $M \sim Geom(p)$, тогда M — обобщенная Пуассоновская сл.* вел.

(связь геом. и пуасс. сумм)

Любая геометрическая сл. сумма явл. пуасс-й сл. суммой, более точно, если

$M, X_1, X_2, \ldots$ – нез. сл. в : $M \sim Geom(p)$; $X_1, X_2, \ldots$ – о.р. с общ. хар. ф-й $f(t)$

$N, Y_1, Y_2, \ldots$ – нез. сл.в. : $N \sim \Pi(\log\frac{1}{p})$; $Y_1, Y_2, \ldots$ – о.р. с общ. хар. ф-й $f_{Y_1}(t) = \frac{1}{\log\frac{1}{p}} \cdot \log\left(\frac{1}{1-(1-p)f(t)}\right)$

т.е. $Y_j \overset{d}{=} X_1 + \ldots + X_L$, $j = 1,2,\ldots$,

L – сл.в с лог-м распр-ем $P(L=k) = \log\frac{1}{p} \cdot \frac{(1-p)^k}{k}$, $k = 1,2,\ldots$

и нез. от $X_1, X_2, \ldots$

$\Rightarrow X_1 + \ldots + X_M \overset{d}{=} Y_1 + \ldots + Y_N$

Следствие. *Предположим S_N — Пуассоновская случайная сумма* с хар-й ф-й $e^{\lambda(f(t)-1)}$. *Если* ф-я $g(t) = \frac{1-e^{-\lambda f(t)}}{1-e^{-\lambda}}$ — *хар. ф-ия,* *то S_N — геометрическая случайная сумма,* $S_N \overset{d}{=} Y_1 + \ldots + Y_M$, где сл.в. $M, Y_1, Y_2, \ldots$ нез, причем $M \sim Geom(p = e^{-\lambda})$, а $Y_1, Y_2, \ldots$ – о.р. с общей хар-й ф-й $g(t)$.

Следствие. *Любая геометрическая случайная сумма имеет безгранично делимое распределение.*

$f_{S_N}(t) = \frac{p}{1-(1-p)f(t)}$ – хар. ф-я геом. сл. суммы

15. Теорема переноса. Аналог теоремы Пуассона для случайных сумм.

Опр — схема серий: $X_{1,1}$; $X_{2,1}, X_{2,2}$; ⋮; $X_{n,1}, X_{n,2}, \dots, X_{n,n}$ — ∀ строка — серия; в ∀ серии норсл в; расп-е от серии к серии может меняться

Теорема переноса

Пусть $\{X_{n,j}\}_{j\geq 1}^{n=1,2,\dots}$ *— схема серий*

Пусть N_n, $n=1,2,\dots$ *положительные целочисленные сл. вел.:* при ∀n N_n *незав. с* $\{X_{n,j}\}_{j\geq 1}$

$\exists\, S_{n,k} = X_{n,1} + \dots + X_{n,k}$, $k \in \mathbb{N}$.

Пусть $\exists \{m_n\}_{n\geq 1}$ *— неогр. возраст. посл.* натур-х *чисел и* ф-ции расп-я $H(x)$ и $A(x)$:

$$P(S_{n,m_n} < x) \underset{n\to\infty}{\Rightarrow} H(x) \text{ и } P(N_n < m_n x) \underset{n\to\infty}{\Rightarrow} A(x)$$

Тогда $\exists$ ф. расп. $F(x)$*, такая что* $P(S_{n,N_n} < x) \underset{n\to\infty}{\Rightarrow} F(x)$. При этом ф. расп-я

$F(x)$ *соотв-ет хар-ой ф-ии* $f(t) = \int\limits_0^\infty h^u(t)\, dA(u)$, $t \in \mathbb{R}$, где

$h(t)$ — хар-ая ф-ия, соотв-ая ф-ии расп-я $H(x)$

Теорема Пуассона для случайных сумм случайных индикаторов

Пусть $\{X_{p,j}\}_{j\geq 1}^{0<p<1}$ *— семейство посл-тей сл. вел.:* ∀ фикс. p сл. в. $X_{p,1}, X_{p,2}, \dots$ — о.д. $\sim Bi(1,p)$: $\begin{cases} 1, & p \\ 0, & 1-p \end{cases}$

Пусть $\{N_p\}_{0<p<1}$ *— семейство полож.* целочисл-х *случ. вел. и* ∀ фикс. p сл. в. $N_p, X_{p,1}, \dots, X_{p,2} \dots$ *— независимы. Пусть* $S_p = \sum\limits_{j=1}^{N_p} X_{p,j}$

Пусть $\exists N$*, такая что* $pN_p \overset{p\to 0}{\Rightarrow} N$*, тогда* $S_p \underset{p\to 0}{\Rightarrow} S$, где S — дискр. сл. в. с распределением

$$P(S = k) = \frac{1}{k!} \int\limits_0^\infty e^{-z} z^k\, dP(N \leqslant z), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Вопрос: что и куда переносит теорема переноса?
Ответ: теорема переноса переносит свойства сходимости с сумм неслучайного числа случайных слагаемых на случайные суммы, попутно трансформирую предельный закон.

16.Смеси вероятностных распределений, идентифицируемость, примеры

Опр. $F(x,y)$ – ф-я на $\mathbb{R}\times\mathcal{Y}$; $\mathcal{Y}\subset\mathbb{R}^m$, $m\geq 1$, мн-во $\mathcal{Y}$ снабжено бор-й σ-алг-й Σ

– ф.расп. как ф-я x при $\forall$ фикс. y

– изм-ма по y при $\forall$ фикс. x (т.е. $\{y: F(x,y)<c\}\in\Sigma$ $\forall x\in\mathbb{R}, c\in\mathbb{R}$)

Q – вер-я мера, опр-я на изм-м пр-ве $(\mathcal{Y},\Sigma)$.

Ф.расп. $H(x)=\int_{\mathcal{Y}} F(x,y)\cdot Q(dy)$ н-ся <u>смесью ф.расп.</u> $F(x,y)$ по y отн. расп. Q

$\underbrace{F(x,y)}$ – <u>смешиваемое расп-е</u>; Q – <u>смешивающее расп-е</u>

Если $F(x,y)\sim\Pi(y)$ $\Rightarrow$ $H(x)$ – <u>смешанное пуассоновское</u>

Пр. Q — дискретная, принимающая значения (y_1, ...) с вероятностями (p_1,...)

$$H(x)=\sum_{k=1}^{\infty}p_kF(x,y_k) \qquad h(x)=\sum_{k=1}^{\infty}p_kf(x,y_k)$$

$F(x,y_k)$ — компоненты смеси, p_k — веса компонент

Опр. $y=(u,v)$, $F(x,y)=F(\frac{x-v}{u})$; $v\in R, u>0$ **— параметр масштаба**

$H(x)=EF(\frac{x-v}{u})$ **— масштабная смесь.**

x и (u,v) — **стохастически независимы** если $H(x)\sim xu+v$,

$$H(x)=\sum_{k=1}^{\infty}p_kF(\frac{x-a_k}{b_k}) \qquad h(x)=\sum_{k=1}^{\infty}p_k\frac{1}{b_k}f(\frac{x-a_k}{b_k})$$

• Пусть мы наблюдаем некую популяцию из K субпопуляций. $F_i(x)$ – вер-ть того, что значение признака не превосходит x, при условии, что индивид из i-ой популяции; p_i – вер-ть выбрать индивида из i-й популяции. $H(x)=\sum_{i=1} p_iF_i(x)$ – вероятность того, что значение признака меньше X.

Опр. $F(x,y)$ – — " —

$\mathcal{Q}$ – семейство сл. в-н, приним-х зн-е во мн-ве $\mathcal{Y}$.

Семейство $\mathcal{H}=\{H_Q(x)=EF(x,Q),\ x\in\mathbb{R}: Q\in\mathcal{Q}\}$, определяемое ядром F и мн-м $\mathcal{Q}$, н-ся <u>идентифицируемым</u>, если из рав-ва $EF(x,Q_1)=EF(x,Q_2)$, $x\in\mathbb{R}$ с $Q_1\in\mathcal{Q}$, $Q_2\in\mathcal{Q}$ вытекает, что $Q_1\overset{d}{=}Q_2$

17. Обобщения Пуассоновского процесса, дважды стохастический Пуассоновский процесс

Опр. Процесс X(t) – **пуассоновский**, если

1) X(0)=0 почти наверное
2) X(t) имеет независимые приращения: $\forall t_0, t_1 \dots, t_n \in T$, $t_0 < t_1 < \dots < t_n$
   $X(t_0)$, $X(t_1)-X(t_0)$, ..., $X(t_n)-X(t_{n-1})$ – независимые в совокупности
3) X(t) однородный: $X(s+h)-X(s) \overset{\text{равно-е распр-но}}{=} X(t+h)-X(t)$ для любых s, t, s+h, t+h ∈ T, $s, t, h, h \geq 0$:
4) При $h \to 0+$ $\exists \lambda > 0$
   $P(X(h) = 0) = 1 - \lambda h + \bar{o}(h)$
   $P(X(h) = 1) = \lambda h + \bar{o}(h)$
   $P(X(h) >= 2) = \bar{o}(h)$

λ - интенсивность п.п.

Обозн. $N_1(t)$ — **стандартный Пуассоновский процесс** (λ = 1)

Кол-во скачков на отрезке времени имеет распределение вариационного ряда выборки из равномерного распределения (равномерное распределение имеет наибольшую дифференциальную энтропию среди всех распределение на отрезке). Время до скачка имеет показательное распределение (показательное распределение имеет наибольшую энтропию среди всех распределение на [0; +∞)).

• Неоднородный Пуассоновский процесс: пусть $\lambda(t)$ - неотриц. интегр. ф-я; $\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(\tau) d\tau$.

$N^*(t)$ - неодн. пуассоновский процесс, если:

1) $\mathbb{P}(N^*(0)=0) = 1$

2) $P(N(t)=k) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$

$P(N^*_\lambda(t)=k) = P(N_1(\lambda t)=k)$, т.е. $N_\lambda(t)$ и $N_1(\lambda t)$ стохастически эквивалентны

При этом $\mathbb{E} N^*(t) = \Lambda(t)$; $\lim\limits_{h \downarrow 0} \left[\frac{N^*(t+h) - N^*(t)}{h}\right] =$

$= \lim\limits_{h \downarrow 0} \frac{\Lambda(t+h) - \Lambda(t)}{h} = \lambda(t)$ - мгновенная интенсивность процесса

Итак, пусть $\Lambda(t)$ - некий случ процесс, обладающий следующими свойствами:

1) $\Lambda(0)=0$ п.н.;

2) $\mathbb{P}(\Lambda(t)<\infty)=1 \ \forall t\geq 0$

3) Траектории процесса неубывают и непр. справа.

Тогда определим $N(t)=N_1(\Lambda(t))$ – дважды-стохастический пуасс. процесс (процесс Кокса)

(N_1, Λ – независ.)

Если $\Lambda(t)=\int\limits_0^t \lambda(\tau)d\tau$, где $\lambda(\tau)$ – случ. процесс с положит. траекториями, то $\lambda(t)$ – мгновенная стохастическая интенсивность. $\Lambda(t)$ наз-ся управляющим процессом.

Опр] Сл. процесс $X(t)$, $t\in T$, наз. стохастически непрерывным, если для $\forall t\in T$ и $\varepsilon>0$ $\lim\limits_{\substack{s\to t\\ s\in T}} P(|X(s)-X(t)|>\varepsilon)=0$.

Опр] $\Lambda(t)$ – вещ-е неубыв-е ф-е, опред-е на неотриц-й полуоси: $\Lambda(0)=0$ и $\Lambda(t)<\infty$ при $\forall t>0$

Точечный процесс $N(t)$, $t\geq 0$, наз. (неоднородным) пуасс-м пр-м с мерой инт-ти $\Lambda(t)$, если

1) $N(t)$ – пр-с с независ-ми приращ-ми

2) если $0\leq s<t<\infty$, то приращение $N(t)-N(s)$ имеет распр-е Пуассона с пар-м $\Lambda(t)-\Lambda(s)$.

Опр] Точечный пр-с $N(t)$, $t\geq 0$ – измеримое отображение вер-го пр-ва $(\Omega,\mathcal{F})$ в $(N,\mathcal{B}(N))$.

...

Опр] $N_1(t)$ – стандартный пуасс-й пр-с.

$\Lambda(t)$ – сл-я мера, независимая от $N_1(t)$.

Сл. процесс $N(t)=N_1(\Lambda(t))$ наз. дважды стохастическим пуасс-м пр-м (пр-м Кокса).

Опр] Сл-й пр-с $\Lambda(t)$, $t\geq 0$, с неубыв-ми непр-ми справа траекториями, $\Lambda(0)=0$, $P(\Lambda(t)<\infty)=1$ $(0<t<\infty)$, наз. ими, удовл-щий условиям случайной мерой.

18. Обобщенный процесс Кокса. ЦПТ и ЗБЧ для обобщенных процессов Кокса.

Оп. $X_1, X_2, \dots$ — о.р. сл.в.
$\forall t \geq 0$ $N(t), X_1, X_2, \dots$ — нез. сл.в.

Пр-с $S(t) = \sum_{j=1}^{N(t)} X_j$, $t \geq 0$, наз. обобщенным пр-м Кокса

(далее опред-ти счит. $\sum_{j=1}^{0} = 0$)

Т (ЦПТ для обобщ. пр-в Кокса)

$EX_i = 0$

$\Lambda(t) \xrightarrow{P} \infty$ $(t \to \infty)$, $d(t) > 0$ — вспомог-е нормир-е ф-е, неогр. возр при $t \to \infty$.
Для того чтобы одномерные распределение нормированного обобщенного пр-са Кокса слабо сходились к распр-но некот-го сл. в-ны Z:

$$\frac{S(t)}{\sigma\sqrt{d(t)}} \underset{t\to\infty}{\Longrightarrow} Z \iff \exists \text{ неотриц. сл.в. } U:$$

1) $P(Z < x) = \int_0^\infty \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{y}}\right) dP(U < y)$, $x \in \mathbb{R}$

2) $\Lambda(t)/d(t) \underset{t\to\infty}{\Longrightarrow} U$

Сл. В усл-х (T) $P\left(\frac{S(t)}{\sigma\sqrt{d(t)}} < x\right) \underset{t\to\infty}{\Longrightarrow} \Phi(x) \iff \frac{\Lambda(t)}{d(t)} \underset{t\to\infty}{\Longrightarrow} 1$

Т (кр-й сх-ти одномерн. распр. обобщ. пр-в Кокса к строго устойчивому закону)

$\Lambda(t) \xrightarrow[t\to\infty]{P} \infty$, $EX_i = 0$

$$\lim_{t\to\infty} P\left(\frac{S(t)}{\sigma\sqrt{d(t)}} < x\right) = G_{\alpha,0}(x),\ x \in \mathbb{R} \iff \lim_{t\to\infty} P(\Lambda(t) < d(t)x) = G_{\frac{\alpha}{2},1}(x),\ x \in \mathbb{R}$$

где $G_{\alpha,\theta}(x)$ — строго устойчивая ф-я распр-я с показателем α и параметром θ, к/о опр-ся своей хар-й ф-ей

$$g_{\alpha,\theta}(t) = e^{-|t|^\alpha} \cdot e^{-i\cdot\frac{\pi\theta\alpha}{2}\cdot \operatorname{sign} t},\quad t \in \mathbb{R},\ 0 < \alpha \leq 2,\ |\theta| \leq \theta_\alpha = \min\left(1, \frac{2}{\alpha} - 1\right)$$

Т (ЗБЧ для обобщ. пр-в Кокса)

$EX_i = a \neq 0$

$\Lambda(t) \xrightarrow[t\to\infty]{P} \infty$

$$\frac{S(t)}{t} \underset{t\to\infty}{\Longrightarrow} Z \iff \exists U: \frac{\Lambda(t)}{t} \Rightarrow U, \text{ при этом } Z \overset{d}{=} a \cdot U$$

В формулировке теоремы сходимость слабая ("⇒").

19. Островершинность масштабных смесей нормальных законов

$H(x) = \int F(x,y)dQ(y)$ — **смесь распределения** F(x,y) по y относительно Q(y)

$y = (u,v),\ F(x,y) = F(\frac{x-v}{u});\ v \in R, u > 0$ — **параметр масштаба**

$H(x) = EF(\frac{x-v}{u})$ — **масштабная смесь**. $\qquad E\Phi(\frac{x}{y}) = P(XY < x) \qquad X \sim N(0,1),\ Y > 0$

- Y — абсолютно-непрерывная случайная величина

$$E\Phi(\frac{x}{y}) = \int_0^\infty \Phi(\frac{x}{y})d(P(Y<y)),\ Y>0$$

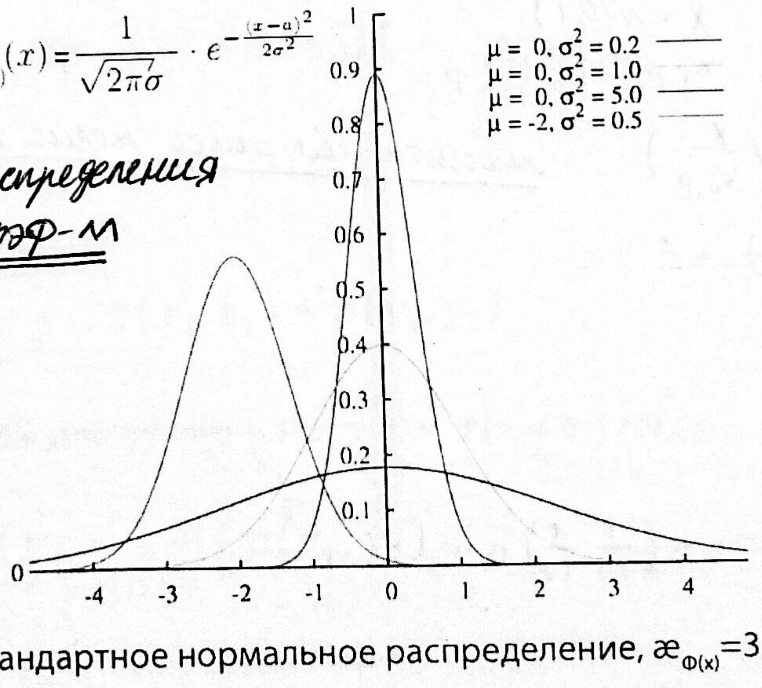
Плотность $E[\frac{1}{y}\varphi(\frac{x}{y})] = \int_0^\infty \frac{1}{y}\varphi(\frac{x}{y})dP(Y<y)$

- Y — дискретная случайная величина

$E\Phi(\frac{x}{y}) = \sum_k P(Y=y_k)\Phi(\frac{x}{y_k})$ $\qquad$ Плотность $= \sum_k \frac{P(Y=y_k)}{y_k}\varphi(\frac{x}{y_k})$

$$f_{N(a,\sigma^2)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

Островершинность распределения характеризуется коэф-м эксцесса.



— - стандартное нормальное распределение, $æ_{\Phi(x)} = 3$

- $æ[Y] = E\left(\frac{(Y - EY)}{\sqrt{D[Y]}}\right)^4 = \frac{E(Y-EY)^4}{(DY)^2} = \frac{M_4}{\sigma^2}$

Если существует конечный 4-й момент сл. в-ны Y, то островершинность определяется коэффициентом эксцесса.

Островершинность характеризует тяжесть "хвостов" распределения (вершина острая — хвосты лёгкие и наоборот); положительные значения параметра æ(Y)-3 соответствуют распределениям с более тяжелыми хвостами, чем у нормального распределения (чем острее распределение, тем больше у него коэффициент эксцесса).

Свойства коэффициента эксцесса

- $\text{æ}[Y] \in [1, \infty)$
- ~~Пусть $X_1, \dots, X_n$ — независимые случайные величины с равной дисперсией.~~

  ~~Пусть $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Тогда $\text{æ}_Y = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} \text{æ}_{X_i}$~~

- Пусть $EX = 0$, $P(Y \geqslant 0) = 1$, $EX^4 < \infty$; $EY^4 < \infty$, X,Y – независимы

  Тогда æ(XY) >= æ(X); æ(XY) = æ(X) ⇔ P(Y=const) = 1

Сл] $\text{æ}(\xi \sqrt{u}) \geqslant 3$ - эксцесс обобщённого пр-са Кокса.

$\xi \sim N(0,1)$, $Eu^2 < \infty$.

- $\xi \sim N(0,1)$, $u > 0$ почти наверное, $z = \xi \sqrt{u}$

  $\Rightarrow \forall x \geqslant 0 \quad P(z > x) \geqslant 1 - \Phi(\sqrt{2\pi} \cdot x p_z(0))$.

  Если расп-е z симм-но, то $P(|z| > x) \geqslant 2(1 - \Phi(\sqrt{2\pi} \cdot x \cdot p_z(0)))$

Опр] $Z = X \cdot W_{\sigma,p}$ $\quad X \sim N(0,1)$

$W_{\sigma,p} \sim \begin{cases} 1, & p \\ \sigma^{-1}, & 1-p \end{cases}$

$F_{p,\sigma} = E\Phi\left(\frac{x}{W_{\sigma,p}}\right)$ масштабная смесь норм. закона

$L(\Phi, F_{p,\sigma}) < \varepsilon$

20. Устойчивость нормальных смесей относительно смешивающего распределения: прямая задача.

$H(x) = \int F(x,y)Q(dy)$ F(x,y) — смешиваемая функция (нормального распределения)
Q(y) – смешивающая

$E\Phi\left(\frac{x}{\sqrt{u}}\right) = \int_0^\infty \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{y}}\right) dP(U < y)$ — **масштабная смесь**

$p(x_1, x_2) = sup_x (F_{x1}(x) - F_{x2}(x))$ — **расстояние**

Задача: оценить $p\left(\frac{x1}{y1}, \frac{x2}{y2}\right)$

Лемма: x_1, y_1, x_2, y_2 – независимы, $P(Y_i =>0)=1$, то

$$p\left(\frac{x1}{y1}, \frac{x2}{y2}\right) \le P(x_1 < 0)P(y_1 = 0) + P(x_2 < 0)P(y_2 = 0) + p(x_1, x_2)P(y_1 > 0) + P(x_2 \le 0) * |P(y_1 = 0) - P(y_2 = 0)| + p(y_1, y_2) * I(x)$$

$$I(x) = \begin{cases} P(x_2 > 0) & x > 0 \\ P(x_2 < 0) & x < 0 \end{cases}$$

Сл 1. $P(y_1 = 0) = P(y_2 = 0) = 0$ *тогда*

$$p\left(\frac{x1}{y1}, \frac{x2}{y2}\right) \le p(x_1, x_2) + p(y_1, y_2) \min \max_{i=1,2} (P(x_i > 0), P(x_i < 0))$$

Сл 2. $p\left(\frac{x1}{y1}, \frac{x2}{y2}\right) \le p(x_1, x_2) + p(y_1, y_2)$

Сл 3. *Пусть хотя бы для одного i* $P(x_i > 0) = P(x_i < 0))$ *тогда*

$$p\left(\frac{x1}{y1}, \frac{x2}{y2}\right) \le p(x_1, x_2) + \frac{1}{2}p(y_1, y_2) \text{ и } p\left(\frac{1}{y1}, \frac{1}{y2}\right) = p(Y1, Y2)$$

Сл 4. *Пусть* $P(y_1 = 0) = P(y_2 = 0) \ne 0$ *тогда*

$$p(x_1 y_1, x_2 y_2) \le p(x_1, x_2) + p(y_1, y_2) \min \max_{i=1,2} (P(x_i > 0), P(x_i < 0))$$

Сл 5. $p(x_1 y_1, x_2 y_2) \le p(x_1, x_2) + p(y_1, y_2)$

Сл 6. *Пусть хотя бы для одного i* $P(x_i > 0) = P(x_i < 0))$ *тогда*

$$p(x_1 y_1, x_2 y_2) \le p(x_1, x_2) + \frac{1}{2}p(y_1, y_2)$$

21. Устойчивость нормальных смесей относительно смешивающего распределения: обратная задача.

X имеет нормальное распределение.

$$\varphi_j(t) = Ee^{\left(-\frac{t^2 y_j}{2}\right)}$$ — характеристическая функция $\quad z_j = x\sqrt{y_j}$

$$\psi_{y_j}(s) = Ee^{-sy_j}$$ — производящая функция

$$\varphi_j(t) = \psi_j\left(\frac{t^2}{2}\right)$$

$$|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)| = \left|\psi_1\left(\frac{t^2}{2}\right) - \psi_2\left(\frac{t^2}{2}\right)\right|$$

По $\psi_j(s)$ можно однозначно определить $P(y_j < x)$

$$P(y_j < x) = \lim_{t\to\infty} \sum_{n<\sqrt{2t}x} \frac{(-1)^n (2t)^{n/2}}{n!} \psi_j^{(n)}\left(\sqrt{2t}\right)$$

— формула обращения

Вывод:

$$|P(Y_1 < x) - P(Y_2 < x)| \le \lim_{t\to\infty} \sum_{n<\sqrt{2t}x} \frac{(-1)^n (2t)^{n/2}}{n!} \left|\varphi_1^{(n)}\left(\sqrt{2t}\right) - \varphi_2^{(n)}\left(\sqrt{2t}\right)\right|$$

- **Опр.** Расстояние Леви м/у X, Y (F_X, F_Y) $L(X, Y) = L(F_X, F_Y) = \inf\{h > 0 : F_X(x-h) - h \le F_Y(x) \le F_X(x+h) + h\}$ для любого x из $\mathbb{R}$.

- Геометрический смысл: максимальная длина стороны квадрата (со сторонами, параллельными осям), который можно вписать между графиками F_X и F_Y

<u>Оценка р-я Леви м/у чистым нормальным законом и двухкомп-т смесью норм-х законов через р-е Леви м/у двухточечным смешивающим распр-ем и вырожденным распр-ем:</u>

Пусть $p \in (0,1)$, $\sigma \in (0,1)$. $L(\Phi, F_{p,\sigma}) \le \varepsilon \Rightarrow \exists\, C : L(U_{p,\sigma}, 1) \le C\sqrt{\varepsilon}$

$C = \left(\sqrt{e}\left(1+\sqrt{2\pi}\right)\right)^{\frac{1}{2}}$. $U_{p,\sigma} \sim \begin{cases} 1, & p \\ \sigma, & 1-p \end{cases}$

22. Моделирование распределений приращений финансовых индексов смесями нормальных законов.

W(x(t)) — процесс моделирующий приращение цен
x(t) — процесс управляет временем
P_j — цена актива
T_j — время заключения j-го контракта
(P_j, T_j) — процесс изменения цены
T — момент времени
N(T) — число контрактов на время T
$x_j = \log P_j - \log P_{j-1}$, X_j — независимы
S(T) = $\sum_{j=1}^{N(t)} x_j$

Теорема При некотором b_k имеет место сходимость $P(\frac{1}{b_k}\sum_{j=1}^{k} x_j < x)$ -> Φ(x)

Пусть при некотором выборе d_k $(d_k \to \infty)$ семейство сл. вел. $\left\{\frac{b_{Nk}}{d_k}\right\}$ слабо компактно, тогда $\lim_{k\to\infty} |f_k\left(\frac{s}{dk}\right) - \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{(xs)^2}{2}\right)| = 0$

Процесс торгов неоднородный => дважды стохастический (Кокса)
(Ч.сл.П. переносе)

$\Delta(t) \xrightarrow[\lambda\to\infty]{} \infty$

- **Теорема** Пусть X_j — норсв, $EX_j=0$, $DX_j = \sigma^2$, тогда следующие утверждения эквивалентны:

1) Существует U, т.ч. $\frac{\Delta(t)}{\lambda t} \underset{\lambda\to\infty}{\Rightarrow} U$

2) $P\left(\frac{\log P(t) - \log P(0)}{\sigma\sqrt{\lambda t}} < x\right) \underset{\lambda\to\infty}{=>} F(x) = \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{u}}\right)$

3) $P\left(\frac{\log \overline{P(t)} - \log P(0)}{\sigma\sqrt{\lambda t}} < x\right) \underset{\lambda\to\infty}{=>} \overline{F(x)} = 2E\Phi\left(\frac{\max(0,x)}{\sqrt{u}}\right) - 1$

4) $P\left(\frac{\log \underline{P(t)} - \log P(0)}{\sigma\sqrt{\lambda t}} < x\right) \underset{\lambda\to\infty}{=>} \underline{F(x)} = 2\left(1 - E\Phi\left(-\frac{\min(0,x)}{\sqrt{u}}\right)\right)$